МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ЮЖНО-УРАЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

537.61.8(07)
К518

Д.С. Клыгач, М.Г. Вахитов, А.Б. Хашимов

ЭЛЕКТРОДИНАМИКА И РАСПРОСТРАНЕНИЕ РАДИОВОЛН

Учебное пособие

Челябинск
2020

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Южно-Уральский государственный университет
(научно исследовательский университет)
Кафедра «Конструирование и производство радиоаппаратуры»

537.61.8(07)
К518

Д.С. Клыгач, М.Г. Вахитов, А.Б. Хашимов

ЭЛЕКТРОДИНАМИКА И РАСПРОСТРАНЕНИЕ РАДИОВОЛН

Учебное пособие

Челябинск
Издательский центр ЮУрГУ
2020

УДК 537.87(075.8) + 621.371(075.8)
К518

Одобрено
учебно-методической комиссией
Высшей школы электроники и компьютерных наук

Рецензенты:

Родионов В.В., Шабунин С.Н.

Клыгач, Д.С.
К518 Электродинамика и распространение радиоволн: учебное пособие / Д.С. Клыгач, М.Г. Вахитов, А.Б. Хашимов. – Челябинск: Издательский центр ЮУрГУ, 2020. – 37 с.

В учебном пособии рассмотрены основные понятия, термины и законы электродинамики. Учебное пособие является базовым при изучении специальных дисциплин программы подготовки специалистов, бакалавров, магистров в области радиотехники, радиофизики, современных телекоммуникационных систем.

Учебное пособие предназначено для студентов Высшей школы электроники и компьютерных наук в соответствие с образовательным стандартом ФГОС 3+.

УДК 537.87(075.8) + 621.371(075.8)

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

В радиотехнике, радиолокации, связи и многих других областях современной техники используются электромагнитные явления и процессы, а также устройства, в которых эти процессы и явления играют существенную роль: передающие и приемные антенны, различные линии передачи электромагнитной энергии, объемные резонаторы и фильтры, делители мощности и т.д. В учебном пособии «Электродинамика и распространение радиоволн» изучаются теоретические основы электромагнетизма: основные уравнения, описывающие электромагнитные явления, процессы излучения и распространения электромагнитных волн в различных средах и направляющих системах. По существу, данное учебное пособие является базовым при изучении специальных дисциплин программы подготовки специалистов, бакалавров, магистров в области радиотехники, радиофизики, современных телекоммуникационных систем.

Учебное пособие составлено в соответствии с требованиями к обязательному минимуму содержания дисциплины "Основы электродинамики и распространения радиоволн" и "Антенны и устройства СВЧ", входящих в основную образовательную программ подготовки бакалавров по специальностям 11.03.03 "Конструирование и технология электронных средств", 11.03.02 «Инфокоммуникационные технологии и системы связи» и 11.05.01 «Радиоэлектронные системы и комплексы» государственного образовательного стандарта высшего профессионального образования. Пособие посвящено рассмотрению основных законов электродинамики, на основе которых далее будут базироваться изучаемые студентами данных специальностей дисциплины.

1. ОСНОВЫ ВЕКТОРНОГО АНАЛИЗА

1.1. Основные понятие и определения

Вектор - это величина, которая может быть представлена направленным отрезком, при этом значения a_x, a_y, a_z - координаты этого вектора и определяют составляющие вектора **a** в ортогональной системе координат через единичные вектора **i, j, k**.

$$\mathbf{a} = a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} + a_z\mathbf{k}. \tag{1.1.1}$$

Среди векторов можно выделить радиус-векторы, начало которых совпадает с началом координат, а конец находится в произвольной точке M (рис. 1) и вполне определяет положение этой точки.

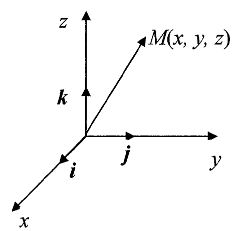

Рис. 1.1.1. Радиус-вектор в декартовой системе координат

Скалярное произведение двух векторов:

$$\begin{aligned}\mathbf{a} &= a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} + a_z\mathbf{k}\\ \mathbf{b} &= b_x\mathbf{i} + b_y\mathbf{j} + b_z\mathbf{k}\end{aligned}, \tag{1.1.2}$$

по определению, равно следующему скаляру:

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = (\mathbf{ab}) = \mathbf{ab} = \mathbf{b}\cdot\mathbf{a} = ab\cos(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = a_xb_x + a_yb_y + a_zb_z, \tag{1.1.3}$$

Векторное произведение $[\boldsymbol{ab}]$ или $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ это вектор, перпендикулярный к векторам $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$, и по абсолютной величине равным площади параллелограмма, построенного на этих векторах (рис. 1.1.2).

$$|[\boldsymbol{ab}]| = ab\sin(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}), \tag{1.1.4}$$

$$[\boldsymbol{ab}] = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = (a_xb_z - a_zb_y)\boldsymbol{i} + (a_zb_x - a_xb_z)\boldsymbol{j} + (a_xb_y - a_yb_x)\boldsymbol{k}. \tag{1.1.5}$$

$$[\boldsymbol{ab}] = -[\boldsymbol{ba}]$$

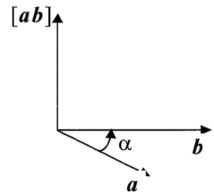

Рис. 1.1.2. Векторное произведение

Направление вектора $[\boldsymbol{ab}]$ определяется из требования, чтобы векторы $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $[\boldsymbol{ab}]$ образовывали *правую тройку.*

Смешанное произведение трех векторов $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$ это скаляр численно равный объему параллелепипеда, построенного на этих векторах:

$$\boldsymbol{a}[\boldsymbol{bc}] = \boldsymbol{b}[\boldsymbol{ca}] = \boldsymbol{c}[\boldsymbol{ab}] = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}. \qquad (1.1.6)$$

$$\boldsymbol{a}[\boldsymbol{bc}] = -\boldsymbol{b}[\boldsymbol{ac}] = -\boldsymbol{a}[\boldsymbol{cb}].$$

В заключение приведем также полезные формулы многократного произведения векторов:

$$\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) = \boldsymbol{b}(\boldsymbol{ac}) - \boldsymbol{c}(\boldsymbol{ab}) = -(\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) \times \boldsymbol{a}, \qquad (1.1.7)$$

$$(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b})(\boldsymbol{c} \times \boldsymbol{d}) = (\boldsymbol{ac})(\boldsymbol{bd}) - (\boldsymbol{bc})(\boldsymbol{ad}). \qquad (1.1.8)$$

1.2. Скалярное поле. Градиент

Векторным или скалярным *полем* называется область пространства, каждой точке которой отнесено значение некоторого вектора или скаляра. Поскольку каждая точка поля определяется ее радиус-вектором $\boldsymbol{r}$, задание векторного или скалярного поля эквивалентно заданию некоторой векторной функции $\boldsymbol{a}(\boldsymbol{r})$ или соответственно скалярной функции $\varphi(\boldsymbol{r})$. Функции $\boldsymbol{a}(\boldsymbol{r})$ и $\varphi(\boldsymbol{r})$ могут, конечно, зависеть, помимо $\boldsymbol{r}$, также и от каких-либо скалярных аргументов, например, от времени. Функции $\boldsymbol{a}(\boldsymbol{r})$ и $\varphi(\boldsymbol{r})$ мы будем считать непрерывными и дифференцируемыми относительно всех их аргументов.

Рассмотрим скалярное поле $\varphi(\boldsymbol{r}) = \varphi(x, y, z)$. Таким полем является, например, поле электростатического потенциала, поле температуры ($\varphi = T$), поле распределенной удельной электропроводимости ($\varphi = \gamma$) и т.п.

Поведение скалярной функции $\varphi(\boldsymbol{r})$ в ближайшей окрестности произвольной точки характеризуется вектором $\operatorname{grad}\varphi$, который определяется равенством (рис. 1.2.1)

$$d\varphi = \operatorname{grad}\varphi \cdot d\boldsymbol{l}. \tag{1.2.1}$$

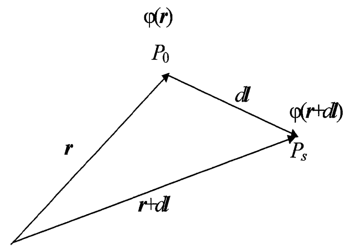

Рис. 1.2.1. Изменение скалярной функции в окрестности

Это определяющее уравнение нужно понимать в том смысле, что изменение скалярной величины $\varphi(\boldsymbol{r})$ при переходе от точки $P_0(\boldsymbol{r})$ к точке $P_s(\boldsymbol{r}+d\boldsymbol{l})$ можно получать скалярным умножением вектора $d\boldsymbol{l}$ на вектор $\operatorname{grad}\varphi$. Данное определение согласуется с понятием полного дифференциала функции нескольких переменных, причем, этими переменными являются пространственные координаты:

$$d\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x}dx + \frac{\partial\varphi}{\partial y}dy + \frac{\partial\varphi}{\partial z}dz. \tag{1.2.2}$$

Из последнего выражения видно, что полный дифференциал функции пространственных координат действительно можно представить в виде (1.2.1), если градиент (в декартовых координатах) выражается следующей формулой:

$$\operatorname{grad}\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\boldsymbol{k}. \tag{1.2.3}$$

Более наглядное представление дает рассмотрение эквипотенциальных поверхностей и силовых линий.

Для изучения зависимости производной от направления дифференцирования рассмотрим те точки поля, в которых φ имеет одинаковое значение, равное, например, φ_0. Совокупность этих точек образует поверхность, которая называется *поверхностью уровня,* или *эквипотенциальной поверхностью.* Аналитически эта поверхность характеризуется уравнением:

$$\varphi(x,y,z) = \varphi_0. \tag{1.2.4}$$

Рис. 1.2.2 изображает сечение плоскостью чертежа ряда поверхностей уровня, соответствующих значениям скаляра φ, равным $\varphi_0, \varphi_0 \pm \Delta\varphi, \varphi_0 + 2\Delta\varphi$ и т.д.

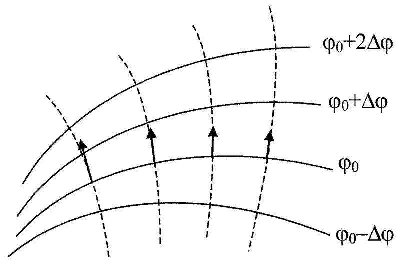

Рис. 1.2.2. Эквипотенциальные поверхности для скалярной функции

Примерами эквипотенциальных поверхностей могут служить концентрические сферы поля точечного заряда, коаксиальные цилиндры в поле заряженного бесконечного цилиндра и т.п.

В более сложных случаях последовательные эквипотенциальные поверхности различны не только по своему положению и размерам, но и по своей форме. Однако, во всяком случае, поверхность каждого проводника в электростатическом поле, является эквипотенциальной поверхностью.

Вектор $\operatorname{grad}\varphi$ в каждой точке нормален к поверхности уровня, проходящей через эту точку. Действительно, при любом бесконечно малом перемещении dl по поверхности уровня имеем $d\varphi = 0$. С учетом (1.2.1) это означает, что $\boldsymbol{dl}$ и $\operatorname{grad}\varphi$ перпендикулярны друг к другу и доказывает высказанное утверждение. На рис. 1.2.2 векторами, которые ориентированы нормально поверхности $\varphi(x,y,z) = \varphi_0$, показаны значения $\operatorname{grad}\varphi$.

Кривая, направление касательной к которой в каждой точке совпадает с направлением вектора $\operatorname{grad}\varphi$ в соответствующей точке, называется *силовой линией*. Из определения следует, что векторным уравнением силовой линии будет:

$$\operatorname{grad}\varphi \times \boldsymbol{dl} = 0, \tag{1.2.5}$$

или в скалярной форме:

$$\frac{\frac{\partial\varphi}{\partial x}}{dx} = \frac{\frac{\partial\varphi}{\partial y}}{dy} = \frac{\frac{\partial\varphi}{\partial z}}{dz}. \tag{1.2.6}$$

На рис. 1.2.2 пунктиром показаны силовые линии. Они пересекают поверхности уровня под прямым углом.

1.3. Векторное поле. Приращение векторной функции

Тогда как производная скаляра по произвольному направлению однозначно определяется заданием вектора $\operatorname{grad}\varphi$, поведение векторной функции $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}(\boldsymbol{r})$ вблизи некоторой точки пространства описывается тензором, определяемым уравнением

$$d\boldsymbol{a} = \mathbf{T}d\boldsymbol{l}, \qquad (1.3.1)$$

где составляющие тензора в декартовых координатах выражаются следующим образом:

$$\mathbf{T} = \begin{Vmatrix} \dfrac{\partial a_x}{\partial x} & \dfrac{\partial a_x}{\partial y} & \dfrac{\partial a_x}{\partial z} \\ \dfrac{\partial a_y}{\partial x} & \dfrac{\partial a_y}{\partial y} & \dfrac{\partial a_y}{\partial z} \\ \dfrac{\partial a_z}{\partial x} & \dfrac{\partial a_z}{\partial y} & \dfrac{\partial a_z}{\partial z} \end{Vmatrix} \qquad (1.3.2)$$

Иными словами, приращение каждой составляющей векторной функции $\boldsymbol{a}(\boldsymbol{r})$ имеет форму, аналогичную приращению скалярной функции (2.1):

$$\begin{aligned} da_x &= \frac{\partial a_x}{\partial x}dx + \frac{\partial a_x}{\partial y}dy + \frac{\partial a_x}{\partial z}dz \\ da_y &= \frac{\partial a_y}{\partial x}dx + \frac{\partial a_y}{\partial y}dy + \frac{\partial a_y}{\partial z}dz \\ da_z &= \frac{\partial a_z}{\partial x}dx + \frac{\partial a_z}{\partial y}dy + \frac{\partial a_z}{\partial z}dz \end{aligned} \qquad (1.3.3)$$

1.4. Поток вектора через поверхность. Дивергенция. Теорема Гаусса

Прежде всего введем ряд понятий, которые понадобятся не только в данном разделе, но и в дальнейшем. Рассмотрим поле вектора $\boldsymbol{a}(\boldsymbol{r})$. В произвольной точке этого поля выделим бесконечно малую плоскую площадку dS, в пределах которой вектор $\boldsymbol{a}$ остается постоянным по величине и по направлению. С выделенной площадкой связаны направление нормали к ней и направление обхода контура площадки (рис. 1.4.1).

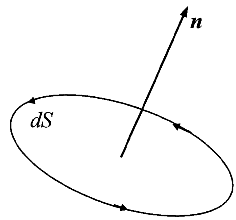

Рис. 1.4.1. Вектор нормали к единичной площади

Будем считать, что эти два направления связаны друг с другом таким образом, чтобы положительное направление нормали и направление обхода контура образовывали правовинтовую систему. (Это означает, что при повороте буравчика правой нарезки по направлению обхода контура его острие будет перемещаться вдоль положительной нормали).

Направление нормали будем характеризировать единичным вектором $\boldsymbol{n}$, а саму эту площадку можно обозначить в виде вектора $d\boldsymbol{S} = \boldsymbol{n}dS$.

Потоком вектора $\boldsymbol{a}$ через бесконечно малую площадку dS называется величина

$$d\Phi = \boldsymbol{a}\boldsymbol{n}dS = \boldsymbol{a}d\boldsymbol{S} = a\cos(\boldsymbol{a},\boldsymbol{n})dS = a_n dS \ , \qquad (1.4.1)$$

где $\boldsymbol{a}$ - значение вектора на площадке dS, a_n – проекция вектора на направление нормали.

Чтобы определить поток вектора через поверхность конечных размеров нужно разбить её на бесконечно малые площадки dS и просуммировать потоки через все эти площадки (рис.1.4.2).

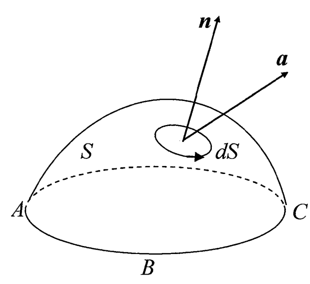

Рис. 1.4.2. Единичная площадь на поверхности S

Такое суммирование тождественно с операцией нахождения определенного интеграла по поверхности S:

$$\Phi = \int_S a_n dS = \int_S \boldsymbol{a} d\boldsymbol{S} \qquad (1.4.2)$$

Если вычисляется поток вектора через замкнутую поверхность, то это обстоятельство обозначается кружком у знака интеграла:

$$\Phi = \oint_S \boldsymbol{a} d\boldsymbol{S} \qquad (1.4.3)$$

Из двух возможных положительных направлений вектора нормали при вычислении потока через замкнутую поверхность будем выбирать в качестве положительного направление внешней нормали к поверхности.

Дивергенция вектора $\boldsymbol{a}$ определяется выражением

$$\operatorname{div} \boldsymbol{a} = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\oint_S \boldsymbol{a} d\boldsymbol{S}}{\Delta V}. \qquad (1.4.4)$$

В соответствии с этим определением дивергенция векторной функции $\boldsymbol{a}(\boldsymbol{r})$ в произвольной точке пространства вычисляется следующим образом: точка окружается замкнутой поверхностью, по которой берётся поверхностный интеграл вектора. Затем берётся предельное значение отношения интеграла к объему, ограниченному этой поверхностью, когда замкнутая поверхность стягивается к точке.

Из определения дивергенции (1.4.4) следует, что данная операция инвариантна по отношению к преобразованию координат. Иными словами значение выражения $\operatorname{div} \boldsymbol{a}$ не зависит от выбора системы координат. Вместе с тем, само выражение $\operatorname{div} \boldsymbol{a}$ можно представить в той или другой системе координат.

В декартовой системе координат имеем

$$\operatorname{div} \boldsymbol{a} = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z}. \qquad (1.4.5)$$

Из определения дивергенции следует, что поток вектора через поверхность элементарного параллелепипеда, объемом $dV = dxdydz$ будет

$$d\Phi = \left(\frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z} \right) dV = \operatorname{div} \boldsymbol{a} dV. \qquad (1.4.6)$$

Формулу, выражающую поток вектора $\boldsymbol{a}$ через поверхность *бесконечно малого* параллелепипеда, нетрудно обобщить для поверхности произвольной формы и размеров. При этом поверхностный интеграл $\oint a_n dS$ можно преобразовать в объёмный; в этом заключается содержание одной из важнейших теорем векторного анализа – *теоремы Гаусса.*

Рассмотрим произвольную замкнутую поверхность S. Разобьём ограниченный ею объём V системой взаимно перпендикулярных плоскостей на совокупность бесконечно малых кубических элементов.

Вычислим с помощью уравнения (1.4.6) поток вектора $\boldsymbol{a}$ через поверхность каждого кубика, лежащего внутри S, и сложим полученные выражения:

$$\sum d\Phi = \sum \operatorname{div} \boldsymbol{a} dV = \int_V \operatorname{div} \boldsymbol{a} dV \qquad (1.4.7)$$

Грани всех элементарных кубиков, составляющих в совокупности объём V, могут быть разделены на два класса – грани внешние, совпадающие с элементами поверхности S, и грани внутренние, ограничивающие смежные кубики друг от друга. Очевидно, что в сумму $\sum d\Phi$ поток вектора $\boldsymbol{a}$ через каждую *внутреннюю грань* войдёт дважды: при подсчёте потока через поверхность кубика, лежащего по одну сторону от этой грани, и при подсчете потока через поверхность кубика, лежащего по другую сторону от неё. Так как нормаль к грани, внешняя по отношению к первому кубику, противоположна нормали к той же грани, внешней по отношению ко второму кубику, то оба потока через эту грань будут иметь противоположные знаки. Следовательно, все члены суммы $\sum d\Phi$, относящиеся к внутренним граням, сократятся, и сумма эта сведётся к сумме потоков вектора $\boldsymbol{a}$ через одни лишь внешние грани кубиков, совпадающие с элементами поверхности S. Таким образом, $\sum d\Phi$ оказывается равной потоку Φ вектора $\boldsymbol{a}$ через заданную поверхность S:

$$\Phi = \oint_S a_n dS = \int_V \operatorname{div} \boldsymbol{a} dV \qquad (1.4.8)$$

Последнее выражение представляет собой *теорему Гаусса*: поток вектора, являющегося непрерывной функцией точки, через произвольную замкнутую поверхность равен интегралу дивергенции этого вектора по объёму, ограниченному этой поверхностью.

Те точки поля, в которых $\operatorname{div} \boldsymbol{a} \neq 0$, принято называть истоками этого поля, а само значение $\operatorname{div} \boldsymbol{a}$ характеризует «интенсивность» истоков. Векторные поля, у которых $\operatorname{div} \boldsymbol{a} = 0$, называются *соленоидальными*.

1.5. Циркуляция вектора. Ротор вектора. Теорема Стокса

Рассмотрим теперь интеграл вектора по замкнутой кривой. Пусть в поле вектора $\boldsymbol{a}(\boldsymbol{r})$ задана некоторая кривая l и положительное направление движения вдоль неё. Разобьём кривую на бесконечно малые элементы $\boldsymbol{dl}$ и умножим скалярно каждый элемент $\boldsymbol{dl}$ на значение вектора $\boldsymbol{a}$ в соответствующей точке поля (рис. 1.5.1).

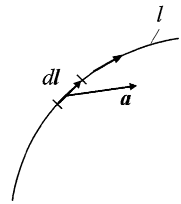

Рис. 1.5.1. Вектор единичной длины

Предел суммы произведений $\boldsymbol{adl} = a_l dl$ при $dl \to 0$ вдоль всей кривой называется *линейным интегралом* вектора $\boldsymbol{a}$ вдоль кривой l:

$$\int_l \boldsymbol{adl} = \int_l a_l dl. \tag{1.5.1}$$

Если кривая l замкнута, то линейный интеграл вдоль неё называется *циркуляцией* вектора $\boldsymbol{a}$ вдоль l и отмечается кружком у знака интеграла:

$$C(\boldsymbol{a}) = \oint_l \boldsymbol{adl}. \tag{1.5.2}$$

Дадим теперь определение *ротора* вектора. Рассмотрим циркуляцию вектора $\boldsymbol{a}$ вдоль контура, ограничивающего малую площадку ΔS, вектор нормали $\boldsymbol{n}$ к которой ориентирован определенным ранее образом. Проекция вектора $\mathrm{rot}\,\boldsymbol{a}$ на направление $\boldsymbol{n}$ нормали в данной точке даётся выражением:

$$\mathrm{rot}_n\,\boldsymbol{a} = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{\oint a_l dl}{\Delta S} \tag{1.5.3}$$

т.е. равна пределу отношения циркуляции вектора $\boldsymbol{a}$ по контуру произвольной площадки, проходящей через данную точку и перпендикулярной к $\boldsymbol{n}$, к величине поверхности площадки.

Из данного определения следует, что проекция вектора $\mathrm{rot}\,\boldsymbol{a}$ не зависит от выбора системы координат. Вместе с тем, само выражение $\mathrm{rot}\,\boldsymbol{a}$ может быть записано в выбранной системе координат. Вектор $\mathrm{rot}\,\boldsymbol{a}$ может быть представлен в форме следующего символического определителя:

$$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{a} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix}, \tag{1.5.5}$$

где $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ суть единичные векторы по осям координат x, y, z. При вычислении этого определителя нужно, конечно, под произведениями типа $\frac{\partial}{\partial x}a_y$ следует понимать частную производную от a_y по x, т.е. $\frac{\partial a_y}{\partial x}$.

Перейдём теперь к рассмотрению циркуляции вектора по контуру произвольной формы и размера. Проведем поверхность S так, чтобы она опиралась на контур l, т. е. чтобы этот контур являлся пограничным контуром поверхности S. Разобьём затем эту поверхность двумя взаимно перпендикулярными системами параллельных линий на совокупность бесконечно малых элементов (рис.1.5.2), которые благодаря своей малости могут считаться плоскими.

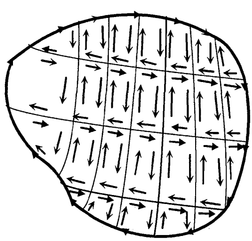

Рис. 1.5.2. Разбиение контура *C* на множество мелких контуров

Применим к каждому из этих элементов уравнение:

$$dC = \mathrm{rot}_n\, \boldsymbol{a} dS. \tag{1.5.6}$$

Сложив такие выражения для всех контуров, найдем:

$$\sum dC = \sum \oint a_l dl = \sum \mathrm{rot}_n\, \boldsymbol{a} dS = \int_S \mathrm{rot}_n\, \boldsymbol{a} dS \tag{1.5.7}$$

где $\boldsymbol{n}$ есть внешняя нормаль к dS, причём внешняя сторона поверхности S должна быть выбрана в соответствии с направлением положительного обхода ее контура (правовинтовая система).

При интегрировании по контурам элементарных площадок каждая граница AB двух смежных площадок пройдётся два раза и притом в противоположных направлениях; поэтому в сумме $\sum \oint a_l dl$ встретятся слагаемые $\int_A^B a_l dl$ и $\int_B^A a_l dl$, в совокупности дающие нуль. Таким образом, $\sum \oint a_l dl$ сведётся к сумме членов, относящихся к одним лишь наружным границам площадок, т. е. к интегралу вектора $\boldsymbol{a}$ по внешнему контуру l площади S, откуда

$$\sum dC = \sum \oint a_l dl = \int_l a_l dl = C, \tag{1.5.8}$$

где C означает циркуляцию вектора $\boldsymbol{a}$ по контуру l. В результате с учётом (5.7) получим:

$$C = \oint_l a_l dl = \int_S \mathrm{rot}_n\, \boldsymbol{a} dS \tag{1.5.9}$$

Уравнение (1.5.9) выражает собой, так называемую *теорему Стокса*, которая гласит: *циркуляция произвольного вектора* $\boldsymbol{a}$ *по замкнутой кривой* l *равна потоку ротора этого вектора через поверхность* S*, опирающуюся на кривую* l. Единственное условие его справедливости состоит в требовании непрерывности и дифференцируемости вектора $\boldsymbol{a}$ во всех точках поверхности.

Форма поверхности S при этом остаётся совершенно неопределенной. Поэтому через любые две поверхности S_1 и S_2, если они обладают одним и тем же контуром l, проходит одинаковый поток ротора любого непрерывного вектора $\boldsymbol{a}$, равный циркуляции этого вектора по общему контуру этих поверхностей.

Из уравнения (1.5.9), в частности, следует, что для замкнутой поверхности:

$$\oint_S \mathrm{rot}_n\, \boldsymbol{a} dS = 0, \tag{1.5.10}$$

так как в этом случае контур l стягивается в точку и $C = 0$.

Векторные поля, у которых $\mathrm{rot}\boldsymbol{a} = 0$, называются *потенциальными*.

1.6. Оператор Гамильтона

1. *Оператором Гамильтона* называется векторный оператор, который в декартовой системе координат имеет вид:

$$\nabla = \boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial x} + \boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial y} + \boldsymbol{k}\frac{\partial}{\partial z} \tag{1.6.1}$$

Как и при пользовании знаком дифференциала, предполагается, что оператор ∇ действует лишь на величины, которые стоят справа от него.

Применяя данный оператор к скалярной функции φ, получаем:

$$\nabla\varphi = \mathrm{i}\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \mathrm{j}\frac{\partial\varphi}{\partial y} + \mathrm{k}\frac{\partial\varphi}{\partial z},$$

то есть

$$\nabla\varphi = \operatorname{grad}\varphi. \tag{1.6.2}$$

Скалярное произведение векторов ∇ и $\boldsymbol{a}$ равно:

$$\nabla a = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z}$$

или

$$\nabla \cdot \boldsymbol{a} = \operatorname{div}\boldsymbol{a}. \tag{1.6.3}$$

Векторное произведение векторов ∇ и $\boldsymbol{a}$ равно:

$$\nabla \times \boldsymbol{a} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix} =$$

$$= \boldsymbol{i}\left(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z}\right) + \boldsymbol{j}\left(\frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x}\right) + \boldsymbol{k}\left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y}\right),$$

то есть

$$\nabla \times \boldsymbol{a} = \operatorname{rot}\boldsymbol{a}. \tag{1.6.4}$$

2. Применяя оператор ∇ к *произведению функций*, необходимо учитывать, что ∇ обладает как векторными, так и дифференциальными свойствами.

При действии дифференциального оператора ∇ на произведения двух скалярных функций или скалярной и векторной функций выполняются правила дифференцирования произведения функций и формально сохраняются операции над векторами. В результате имеем:

$$\left.\begin{aligned} &\nabla(\varphi\psi) = \psi\nabla\varphi + \varphi\nabla\psi \\ &\nabla(\varphi\boldsymbol{a}) = \varphi\nabla\boldsymbol{a} + \boldsymbol{a}\nabla\varphi \\ &\nabla\times(\varphi\boldsymbol{a}) = \varphi\nabla\times\boldsymbol{a} + \boldsymbol{a}\times\nabla\varphi \end{aligned}\right\} \text{ или } \left.\begin{aligned} &\operatorname{grad}(\varphi\psi) = \psi\operatorname{grad}\varphi + \varphi\operatorname{grad}\psi \\ &\operatorname{div}(\varphi\boldsymbol{a}) = \varphi\operatorname{div}\boldsymbol{a} + \boldsymbol{a}\operatorname{grad}\varphi \\ &\operatorname{rot}(\varphi\boldsymbol{a}) = \varphi\operatorname{rot}\boldsymbol{a} + \boldsymbol{a}\times\operatorname{grad}\varphi \end{aligned}\right\} \tag{1.6.5}$$

При действии оператора ∇ на скалярное или векторное произведение двух векторных функций требуется большая осторожность. Так, при вычислении выражения

$$\nabla(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}) = \operatorname{div}(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}) \tag{1.6.6}$$

необходимо воспользоваться правилом для преобразования смешанного произведения векторов:

$$\left.\begin{aligned} &\nabla(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}) = \boldsymbol{b}(\nabla\times\boldsymbol{a}) - \boldsymbol{a}(\nabla\times\boldsymbol{b}) \\ &\text{или} \\ &\operatorname{div}(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}) = \boldsymbol{b}\operatorname{rot}\boldsymbol{a} - \boldsymbol{a}\operatorname{rot}\boldsymbol{b} \end{aligned}\right\} \tag{1.6.7}$$

Однако операции

$$\nabla(\boldsymbol{ab}) = \mathrm{grad}(\boldsymbol{ab}) \text{ и } \nabla\times(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}) = \mathrm{rot}(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}) \qquad (1.6.8)$$

не могут быть представлены в виде суммы двух членов, в каждом из которых дифференцируется лишь один из сомножителей. В курсе векторного анализа доказывается, что эти выражения могут быть, тем не менее, представлены в виде суммы четырёх членов:

$$\nabla(\boldsymbol{ab}) = (\boldsymbol{b}\nabla)\boldsymbol{a} + (\boldsymbol{a}\nabla)\boldsymbol{b} + \boldsymbol{b}\times\nabla\boldsymbol{a} + \boldsymbol{a}\times\nabla\boldsymbol{b} \qquad \text{или}$$

$$\mathrm{grad}(\boldsymbol{ab}) = \frac{d\boldsymbol{a}}{d\boldsymbol{b}} + \frac{d\boldsymbol{b}}{d\boldsymbol{a}} + \boldsymbol{b}\times\mathrm{rot}\,\boldsymbol{a} + \boldsymbol{a}\times\mathrm{rot}\,\boldsymbol{b}. \qquad (1.6.9)$$

$$\nabla\times(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}) = (\boldsymbol{b}\nabla)\boldsymbol{a} - (\boldsymbol{a}\nabla)\boldsymbol{b} + \boldsymbol{a}\nabla\boldsymbol{b} - \boldsymbol{b}\nabla\boldsymbol{a} \qquad \text{или}$$

$$\mathrm{rot}(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}) = \frac{d\boldsymbol{a}}{d\boldsymbol{b}} - \frac{d\boldsymbol{b}}{d\boldsymbol{a}} + \boldsymbol{a}\,\mathrm{div}\,\boldsymbol{b} - \boldsymbol{b}\,\mathrm{div}\,\boldsymbol{a}. \qquad (1.6.10)$$

В частном случае $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b}$ получим:

$$\frac{1}{2}\nabla a^2 = (\boldsymbol{a}\nabla)\boldsymbol{a} + \boldsymbol{a}\times(\nabla\times\boldsymbol{a}), \qquad (1.6.11)$$

3. Применение оператора ∇ упрощает нахождение вторых и следующих старших производных от скалярных и векторных величин. Так, например, квадрат вектора ∇ равен:

$$\nabla^2 = \nabla_x^2 + \nabla_y^2 + \nabla_z^2 = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

Поэтому, раскрывая смысл произведения $\nabla(\nabla\varphi)$ по правилам векторной алгебры, получим:

$$\mathrm{divgrad}\,\varphi = \nabla(\nabla\varphi) = \nabla^2\varphi = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} \qquad (1.6.12)$$

Оператор ∇^2 часто обозначается через Δ и называется лапласианом.

Известные формулы векторной алгебры

$$[\boldsymbol{b}(\boldsymbol{b}\varphi)] = 0,\ \boldsymbol{b}[\boldsymbol{ba}] = 0,\ [\boldsymbol{b}(\boldsymbol{ba})] = \boldsymbol{b}(\boldsymbol{ba}) - (\boldsymbol{bb})\boldsymbol{a} \qquad (1.6.13)$$

остаются справедливыми и при замене вектора $\boldsymbol{b}$ символическим вектором ∇ (при любых $\boldsymbol{a}$ и φ):

$$\left.\begin{aligned} &[\nabla(\nabla\varphi)] = [\nabla\,\mathrm{grad}\,\varphi] = \mathrm{rotgrad}\,\varphi = 0, \\ &\nabla[\nabla\boldsymbol{a}] = \nabla\,\mathrm{rot}\,\boldsymbol{a} = \mathrm{divrot}\,\boldsymbol{a} = 0 \\ &[\nabla[\nabla\boldsymbol{a}]] = \nabla(\nabla\boldsymbol{a}) - \nabla^2\boldsymbol{a} \ \text{ или }\ \mathrm{rotrot}\,\boldsymbol{a} = \mathrm{graddiv}\,\boldsymbol{a} - \nabla^2\boldsymbol{a} \end{aligned}\right\} \qquad (1.6.14)$$

В справедливости (1.6.12) и (1.6.14) легко убедиться непосредственным вычислением в декартовых координатах.

1.7. Ортогональные криволинейные системы координат

В зависимости от геометрии рассматриваемой электромагнитной системы часто бывает удобно использовать не декартову систему координат, а ту, в которой уравнения имеют более простой вид.

Положение каждой точки пространства определяется ее радиусом-вектором $\boldsymbol{r}$. До сих пор этот вектор задавался тремя числами – декартовыми координатами x, y, z, которые определяют проекции вектора на координатные оси с единичными направляющими векторами $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$:

$$\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k} . \tag{1.7.1}$$

Но положение произвольной точки можно задать и через три другие независимые координаты: x_1, x_2, x_3.

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(x_1, x_2, x_3), \tag{1.7.2}$$

где, естественно, декартовы координаты являются функциями этих трех переменных:

$$\begin{aligned} x &= x(x_1, x_2, x_3), \\ y &= y(x_1, x_2, x_3), \\ z &= z(x_1, x_2, x_3). \end{aligned} \tag{1.7.3}$$

Эти уравнения связывают новые криволинейные координаты x_1, x_2, x_3 со старыми x, y, z.

Для систем координат вводятся понятия координатной поверхности и координатной линии.

Координатной поверхностью называется поверхность, на которой какая-либо одна из криволинейных координат принимает постоянное значение:

$$x_i = \text{const}, \tag{1.7.4}$$

где $i = 1, 2$ или 3. В векторном виде уравнение, например, координатной поверхности $x_1 = x_{10}$ есть

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(x_{10}, x_2, x_3). \tag{1.7.5}$$

Таким образом, в каждой точке пространства пересекаются три координатные поверхности.

Каждые две координатные поверхности пересекаются по линии, которая называется координатной линией, соответствующей третьей координате. Векторным уравнением, например, координатной линии x_1, которая есть линия пересечения координатных поверхностей $x_2 = x_{20}$, $x_3 = x_{30}$, будет:

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(x_1, x_{20}, x_{30}). \tag{1.7.6}$$

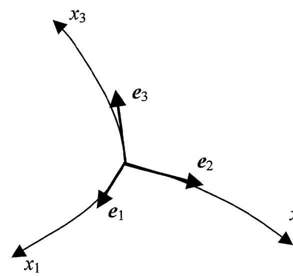

Рис. 1.7.1. Криволинейная система координат

Наиболее простыми являются *ортогональные криволинейные системы координат*. Это такие системы координат, для которых координатные линии, проходящие через произвольную точку, попарно перпендикулярны (рис. 1.7.1), каждая из них перпендикулярна соответствующей координатной поверхности. Тройка единичных базисных векторов $\boldsymbol{e}_i$ (векторов, касательных к координатным линиям) является взаимно перпендикулярной тройкой векторов.

Ниже в таблице 1 приводятся основные данные для трех наиболее часто употребляемых ортогональных систем координат: сферической. Для обозначения ортов – единичных базисных векторов – будем использовать принятое в литературе обозначение вида $\boldsymbol{e}_k$, где в качестве индекса употребляется конкретное обозначение координаты.

Таблица 1

Ортогональные криволинейные системы координат

	Сферические координаты			Цилиндрические координаты		
q_k	r	ϑ	α	r	α	z
$\boldsymbol{e}_k$	$\boldsymbol{r}_0$	ϑ_0	α_0	$\boldsymbol{r}$	α_0	z_0
h_k	1	r	$r\sin\vartheta$	1	r	1

Основные дифференциальные операторы в криволинейной системе координат:

$$\operatorname{grad}\varphi = \frac{1}{h_1}\frac{\partial\varphi}{\partial q_1}\boldsymbol{e}_1 + \frac{1}{h_2}\frac{\partial\varphi}{\partial q_2}\boldsymbol{e}_2 + \frac{1}{h_3}\frac{\partial\varphi}{\partial q_3}\boldsymbol{e}_3, \qquad (1.7.7)$$

$$\operatorname{div}(\boldsymbol{a}) = \frac{1}{h_1h_2h_3}\left[\frac{\partial(h_2h_3\boldsymbol{a}_1)}{\partial q_1} + \frac{\partial(h_1h_3\boldsymbol{a}_2)}{\partial q_2} + \frac{\partial(h_1h_2\boldsymbol{a}_3)}{\partial q_3}\right], \qquad (1.7.8)$$

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{a} = \begin{vmatrix} \dfrac{\boldsymbol{e}_1}{h_2h_3} & \dfrac{\boldsymbol{e}_2}{h_1h_3} & \dfrac{\boldsymbol{e}_3}{h_1h_2} \\ \dfrac{\partial}{\partial q_1} & \dfrac{\partial}{\partial q_2} & \dfrac{\partial}{\partial q_3} \\ h_1\boldsymbol{a}_1 & h_2\boldsymbol{a}_2 & h_3\boldsymbol{a}_3 \end{vmatrix}, \qquad (1.7.9)$$

$$\nabla^2\varphi = \frac{1}{h_1h_2h_3}\left[\frac{\partial}{\partial q_1}\left(\frac{h_2h_3}{h_1}\frac{\partial\varphi}{\partial q_1}\right) + \frac{\partial}{\partial q_2}\left(\frac{h_1h_3}{h_2}\frac{\partial\varphi}{\partial q_2}\right) + \frac{\partial}{\partial q_1}\left(\frac{h_1h_2}{h_3}\frac{\partial\varphi}{\partial q_3}\right)\right]. \qquad (1.7.10)$$

2. ОСНОВНЫЕ ЗАКОНЫ ЭЛЕКТРИЧЕСТВА И МАГНЕТИЗМА

2.1. Закон Ампера

Пусть дан проводник по которому течёт ток J. Если охватить контуром радиуса r этот проводник. Из закона Био-Савара-Лапласа получим, что циркуляция напряженности магнитного поля будет равна $\boldsymbol{H}$ будет равна:

$$\oint_l \mathbf{H}\cdot d\mathbf{l} = J, \qquad (2.1.1)$$

где l - длина окружности контура.

Если взять несколько n проводников, по которым текут различные токи J_i. Тогда согласно принципу суперпозиции, общее магнитное поле будет представлять собой сумму магнитных поле от каждого проводника.

$$\boldsymbol{H} = \sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{H}_i. \qquad (2.1.2)$$

Охватим контуром все n проводников, тогда для каждого проводника, если рассматривать его в отдельности, можно найти циркуляцию магнитного поля:

$$\oint_l \boldsymbol{H}_i\cdot d\boldsymbol{l} = J_i. \qquad (2.1.3)$$

Просуммируем все полученные циркуляции магнитного поля. Поскольку интеграл вычисляется по контуру l и не зависит от подынтегрального выражения, тогда сумму всех интегралов можно представить как интеграл от суммы всех магнитных полей.

$$\sum_{i=1}^{n}\oint_{l}\boldsymbol{H}_i d\boldsymbol{l} = \int_{l}\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{H}_i d\boldsymbol{l} = \sum_{i=1}^{n} J_i \ . \tag{2.1.4}$$

Согласно формуле (2.1.2), левую часть можно переписать

$$\oint_{l}\boldsymbol{H}\cdot d\boldsymbol{l} = \sum_{i=1}^{n} J_i \, . \tag{2.1.5}$$

В итоге, получили, что циркуляция магнитного поля по замкнутому контуру равна сумме токов, пронизывающих данный контур.

2.2. Закон электромагнитной индукции Фарадея. Правило Ленца

Электромагнитная индукция — явление возникновения электрического тока в замкнутом контуре при изменении магнитного потока, проходящего через него.

Пусть дан замкнутый контур L площадью S. Через который проводит магнитный поток Φ, который равен

$$\Phi = \int_{S}\boldsymbol{B}d\boldsymbol{S} \, . \tag{2.2.1}$$

Тогда при изменении магнитного потока в контуре будет возникать ξ Э.Д.С., которая будет пропорциональна изменению магнитного потока

$$\xi = -\frac{\partial}{\partial t}\int_{S}\boldsymbol{B}d\boldsymbol{S} \, . \tag{2.2.2}$$

Это и носит название закона электромагнитной индукции Фарадея. Первоначально, Фарадей получил закон без знака минус перед потоком. Однако, в контуре возникает ток J_i, который называется индукционным. При этом индукционный ток направлен таким образом, что его действие противоположно действию причины, вызвавшей этот ток.

Вследствие этого, индукционный ток порождает индукционный магнитный поток Φ_i, который всегда противонаправлен изменению основного магнитного потока. Это явление называется правилом Ленца.

2.3. Теоремы Гаусса для электрического и магнитного поля

Рассмотрим теорему Гаусса для электрического поля. Пусть дано тело объёмом V ограниченное замкнутой гладкой поверхностью площадью S. Поверхность ограничивает точечные заряды $q_1, q_2, \ldots, q_n$, распределённые внутри объёма. Тогда поток электрического поля через замкнутую поверхность S будет равен:

$$\int_S \boldsymbol{D}d\boldsymbol{S} = \sum_i^n q_i \qquad (2.3.1)$$

Теорема Гаусса для электрического поля можно записать: поток вектора индукции электрического поля через замкнутую поверхность равен сумме зарядов, ограниченных этой поверхностью. Данная теорема устанавливает связь между источниками заряда, распределенными в объёме, и электрическим полем, создаваемыми этими источниками.

Если рассмотреть теорему Гаусса для электрического поля с учетом силовых линий, то модно отметить следующее:

Поток поля через поверхность тела объёмом V есть количество силовых линий, пронизывающих эту поверхность. При этом, поток, создаваемый положительными зарядами будет иметь положительное значение, отрицательными – суммироваться со знаком минус.

Силовые линии начинаются или кончаются только на зарядах (начинаются на положительных, кончаются на отрицательных), или могут ещё уходить на бесконечность. Количество силовых линий, исходящих из заряда (начинающихся в нём) равно величине этого заряда. Для отрицательных зарядов всё так же, только заряд равен минус количеству входящих в него (кончающихся на нём) линий.

Исходя из описанных выше положений, теорема Гаусса представляется очевидной в формулировке: количество линий, исходящих из замкнутой поверхности равно суммарному количеству зарядов внутри неё — то есть количеству линий, появившихся внутри неё. Конечно же, подразумевается учёт знаков, в частности, линия, начавшаяся внутри поверхности на положительном заряде может закончиться на отрицательном заряде также внутри неё (если такой там есть), тогда она не даст вклада в поток через эту поверхность, так как или вообще до неё не дойдёт, или выйдет, а потом войдёт обратно (или, вообще говоря, пересечёт поверхность чётное количество раз поровну в прямом и противоположном направлении), что при суммировании с учётом знака даст вклад в поток ноль. То же можно сказать о линиях, начавшихся и закончившихся вне данной поверхности — по той же причине они также дадут нулевой вклад в поток через неё.

Запишем теорему Гаусса для магнитного поля. Поток электрического поля через замкнутую поверхность S будет нулю.

$$\Phi = \int_S \boldsymbol{B} d\boldsymbol{S} = 0 \qquad (2.3.2)$$

Физический смысл данной теоремы заключается в том, что в природе не существует магнитных зарядов (монополей), которые создавали бы магнитное поле, как электрические заряды создают электрическое поле. Иными словами, теорема Гаусса для магнитной индукции показывает, что магнитное поле является (полностью) вихревым.

2.4. Дифференциальный закон Ома. Уравнение неприрывности

Дифференциальной закон Ома для изотропных сред можно получить из обычного закона Ома для участка цепи

$$J = \frac{U}{R}. \qquad (2.4.1)$$

Силу тока можно представить, как поток плотности тока

$$J = \int_S \boldsymbol{j} d\boldsymbol{S}. \qquad (2.4.2)$$

Напряжение можно записать через разность потенциалов в электрическом поле

$$U = \int_l \boldsymbol{E} d\boldsymbol{l}\ . \qquad (2.4.3)$$

Поскольку в общем случае плотность тока от площади и напряженность электрического поля от расстояния не зависят, тогда интегралы (2.4.2) и (2.4.3) будут равны

$$J = \int_S \boldsymbol{j} d\boldsymbol{S} = jS, \qquad (2.4.4)$$

$$U = \int_l \boldsymbol{E} d\boldsymbol{l} = El. \qquad (2.4.5)$$

Сопротивление можно записать через проводимость среды

$$R = \frac{1}{\sigma}\frac{l}{S}. \qquad (2.4.6)$$

Подставим формулы (2.4.4) – (2.4.6) в формулу (2.4.1), получим:

$$\boldsymbol{j} = \sigma \boldsymbol{E} . \qquad (2.4.7)$$

Все величины, входящие в это уравнение, являются функциями координат и, в общем случае, времени.

Уравнение непрерывности описывает закон сохранения заряда в элементарном объёме. Вывод закона основывается на том, что электрический можно представить, как изменение электрического заряда во времени:

$$J = -\frac{dq}{dt} . \qquad (2.4.8)$$

Силу тока можно записать с помощью плотности по (2.4.4), а заряд, распределенный в элементарном объёме можно записать через объемную плотность заряда, которая равна:

$$q = \int_V \rho dV . \qquad (2.4.9)$$

С учётом этого, получим:

$$\int_S \boldsymbol{j} d\boldsymbol{S} = -\frac{d}{dt}\int_V \rho dV . \qquad (2.4.10)$$

К левой части уравнения применим теорему Остроградского – Гаусса:

$$\int_S \boldsymbol{j} d\boldsymbol{S} = \int_V div\boldsymbol{j} = -\frac{d}{dt}\int_V \rho dV . \qquad (2.4.11)$$

Интегралы должны быть равны, поэтому равны и подынтегральные выражения, в итоге получим уравнение непрерывности:

$$div\boldsymbol{j} + \frac{d\rho}{dt} = 0 . \qquad (2.4.12)$$

Данное уравнение описывает изменение электрического заряда в объёме тела во времени.

3. УРАВНЕНИЯ МАКСВЕЛЛА

3.1. Первое уравнение Максвелла

Первое уравнение Максвелла, называемое еще законом полного тока, в *интегральной* форме записывается как

$$\oint_l \boldsymbol{H} \cdot d\boldsymbol{l} = \int_S \boldsymbol{j}_{\text{полн}} \cdot d\boldsymbol{S} \qquad (3.1.1)$$

формулируется следующим образом: *циркуляция вектора напряженности магнитного поля по любому замкнутому контуру равна полному току, пронизывающую любую поверхность, ограниченную этим контуром.*

В (3.1.1) фигурирует плотность полного тока

$$\boldsymbol{j}_{\text{полн}} = \boldsymbol{j} + \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}. \qquad (3.1.2)$$

Первое слагаемое $\boldsymbol{j}$ в (3.1.2) – это плотность тока проводимости, связанная с перемещением электрических зарядов. Второе слагаемое $\frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}$ носит название плотности тока смещения и связано с изменением во времени электрического поля. Из первого уравнения Максвелла следует, что в создании магнитного поля участвуют как ток проводимости, так и ток смещения.

Используя теорему Стокса, линейный интеграл по замкнутому контуру l в (3.1.1) можно заменить интегралом от $\mathrm{rot}\,\boldsymbol{H}$ по поверхности S, ограниченной этим контуром. Выполнив предельный переход $S \to 0$, вместо (3.1.1) можно записать первое уравнение Максвелла в *дифференциальной* форме:

$$\mathrm{rot}\boldsymbol{H} = \boldsymbol{j}_{\text{полн}}\ . \qquad (3.1.3)$$

Физический смысл данного уравнения в том, что магнитное поле создаётся не только токами проводимости, но и изменяющимся во времени электрическим полем.

3.2. Второе уравнение Максвелла

Второе уравнение Максвелла или закон электромагнитной индукции в *интегральной форме* имеет вид:

$$\oint_l \boldsymbol{E}d\boldsymbol{l} = -\frac{\partial}{\partial t}\int_S \boldsymbol{B}d\boldsymbol{S} \qquad (3.2.1)$$

и формулируется следующим образом: *электродвижущая сила (э.д.с.), наводимая в замкнутом контуре изменяющимся магнитным полем, равна скорости убывания магнитного потока, сцепленного с данным контуром.* Заметим, что циркуляция вектора напряженности электрического поля по рассматриваемому контуру, по существу, является определением э.д.с. электромагнитной индукции в этом контуре. (Ее не следует путать с э.д.с. источников, связанной с работой сторонних сил по перемещению электрических зарядов).

По теореме Стокса контурный интеграл в (3.2.1) может быть преобразован в интеграл по поверхности:

$$\oint_l \boldsymbol{E}d\boldsymbol{l} = \int_S \mathrm{rot}\,\boldsymbol{E}d\boldsymbol{S} = -\frac{\partial}{\partial t}\int_S \boldsymbol{B}d\boldsymbol{S}\,. \qquad (3.2.2)$$

Стягивая поверхность в точку, т.е. выполняя предельный переход $S \to 0$, приходим ко второму уравнению Максвелла в *дифференциальной форме*:

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}. \qquad (3.2.3)$$

Физический смысл данного уравнения: переменное магнитное поле порождает вихревое электрическое поле.

3.3. Третье уравнение Максвелла

Это уравнение известно как электростатическая теорема Гаусса. В *интегральной* форме уравнение записывается как

$$\oint_S \boldsymbol{D}d\boldsymbol{S} = q = \int_V \rho dV. \qquad (3.3.1)$$

Поток вектора электрического смещения $\boldsymbol{D}$ *через замкнутую поверхность* S *равен свободному заряду* ρ*, заключенному внутри этой поверхности.* Максвелл распространил этот закон на поля, изменяющиеся во времени и показал его применимость в этом случае.

В *дифференциальной* форме четвертое уравнение Максвелла принимает вид:

$$\operatorname{div}\boldsymbol{D} = \rho. \qquad (3.3.2)$$

Физический смысл уравнения в том, что оно показывает, что источником электростатического поля являются свободные электрические заряды.

3.4. Четвертое уравнение Максвелла

Это уравнение выражает условие непрерывности вектора индукции магнитного поля. В *интегральной* форме оно имеет вид:

$$\oint_S \boldsymbol{B}d\boldsymbol{S} = 0, \qquad (3.4.1)$$

поток вектора индукции магнитного поля $\boldsymbol{B}$ *через любую замкнутую поверхность равен нулю.*

Соответственно, в *дифференциальной* форме третье уравнение будет

$$\operatorname{div}\boldsymbol{B} = 0. \qquad (3.4.2)$$

На основании этого уравнения можно заключить, что магнитных зарядов не существует.

Для того чтобы решить систему уравнений Максвелла и учесть влияние среды, в которых распространяются электромагнитные волны, систему уравнений дополняют материальными уравнениями, которые учитывают свойства окружающей токи и заряды среды. В случае однородной среды материальные уравнения имеют вид:

$$\boldsymbol{D} = \varepsilon\varepsilon_0 \boldsymbol{E};$$

$$\boldsymbol{B} = \mu\mu_0 \boldsymbol{H};$$

$$\boldsymbol{j} = \gamma \boldsymbol{E}.$$

В этих уравнениях:

-поляризованность среды учитывает величина ε,

-намагниченность среды величина μ,

-проводящие свойства среды величина σ.

3.5. Полная система уравнений Максвелла

Запишем здесь еще раз компактно полную систему уравнений Максвелла. Она включает четыре уравнения для векторов электромагнитного поля: напряженности электрического поля $\boldsymbol{E}$, электрического смещения $\boldsymbol{D}$, индукции магнитного поля $\boldsymbol{B}$, напряженности магнитного поля $\boldsymbol{H}$ и, кроме того, вектора плотности тока $\boldsymbol{j}$. В Таблице 2 приведена система уравнений Максвелла в дифференциальной и интегральной форме.

Последнее соотношение (3.5.7) отражает лишь определенную зависимость плотности тока от напряженности электрического тока и в зависимости от конкретных условий протекания тока может принимать и другой вид.

Таблица 2

Система уравнений Максвелла в дифференциальной и интегральной форме

Уравнения Максвелла	
В интегральной форме	В дифференциальной форме
$\oint_l \boldsymbol{H} \cdot d\boldsymbol{l} = \int_S \left(\boldsymbol{j} + \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} \right) \cdot d\boldsymbol{S}$ (3.5.1а)	$\mathrm{rot}\boldsymbol{H} = \boldsymbol{j} + \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}$ (3.5.1б)
$\oint_l \boldsymbol{E} d\boldsymbol{l} = -\frac{\partial}{\partial t} \int_S \boldsymbol{B} d\boldsymbol{S}$ (3.5.2а)	$\mathrm{rot}\, \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}$ (3.5.2б)
$\oint_S \boldsymbol{B} d\boldsymbol{S} = 0$ (3.5.3а)	$\mathrm{div}\, \boldsymbol{B} = 0$ (3.5.3б)
$\oint_S \boldsymbol{D} d\boldsymbol{S} = q = \int_V \rho dV$ (3.5.4а)	$\mathrm{div}\, \boldsymbol{D} = \rho$ (3.5.4б)

Материальные уравнения	
В среде с потерями	В среде без потерь
$\boldsymbol{D}=\varepsilon_0\boldsymbol{E}+\boldsymbol{P}$ (3.5.5а)	$\boldsymbol{D}=\varepsilon\varepsilon_0\boldsymbol{E}$ (3.5.5б)
$\boldsymbol{B}=\mu_0(\boldsymbol{H}+\boldsymbol{M})$ (3.5.6а)	$\boldsymbol{B}=\mu\mu_0\boldsymbol{H}$ (3.5.6б)
$\boldsymbol{j}=\gamma\boldsymbol{E}$ (3.5.7)	

4. ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ ДЛЯ КОМПОНЕНТ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ

Рассмотрим, прежде всего, те упрощения уравнений Максвелла, которые наиболее часто используются в задачах электродинамики. Это потенциальные поля: электростатическое поле; электрическое поле растекания тока в проводящей среде; квазистатическое переменное поле в диэлектрической среде.

4.1. Электрическое поле

Это раздел электродинамики, в котором рассматриваются явления, когда отсутствуют изменения физических величин во времени и отсутствует перемещение зарядов (электрические токи), т.е. $\dfrac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}=0, \quad \dfrac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}=0, \quad \boldsymbol{j}=0$.

В этом случае из уравнений Максвелла следует, что электростатическое поле описывается уравнениями:

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{E}=0, \tag{4.1.1}$$

$$\operatorname{div}\boldsymbol{D}=\rho, \tag{4.1.2}$$

$$\boldsymbol{D}=\varepsilon_0\boldsymbol{E}+\boldsymbol{P}, \ (\boldsymbol{D}=\varepsilon\varepsilon_0\boldsymbol{E}). \tag{4.1.3}$$

Напряженность электрического поля – векторная физическая величина, характеризующая электрическое поле в данной точке и равная отношению силы $\vec{F}$, действующей на неподвижный точечный заряд, помещённый в данную точку поля, к величине этого заряда q. В дальнейшем будем рассматривать его в кусочно-однородной среде, т.е. в среде, для которой в пределах некоторого объема относительная диэлектрическая проницаемость имеет постоянное значение. Уравнение (4.1.1) будет тождественно удовлетворено (см. (1.6.14)), если ввести скалярный потенциал φ, который определяется следующим образом:

$$\boldsymbol{E} = -\operatorname{grad}\varphi . \qquad (4.1.4)$$

Подставляя в (4.2), с учетом (4.3) для среды с постоянным ε получим уравнение для потенциала:

$$\operatorname{divgrad}\varphi = \Delta\varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon\varepsilon_0}.$$

Дифференциальное уравнение второго порядка

$$\Delta\varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon\varepsilon_0} \qquad (4.1.5)$$

при наличии объемного заряда $\rho \neq 0$ носит название уравнения Пуассона (лапласиан функции в декартовой системе координат принимает вид

$$\Delta\varphi = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}).$$

Если объемный заряд отсутствует и соответственно правая часть равна нулю, то такое уравнение носит название уравнения Лапласа:

$$\Delta\varphi = 0 . \qquad (4.1.6)$$

Помимо уравнений поля для формулировки задач должны быть заданы граничные условия. Определим каким условия удовлетворяют вектора поля на границе раздела сред с различными диэлектрическими проницаемостями. Эти условия устанавливаются также на основе уравнений Максвелла.

Будем считать, что по разные стороны от границы раздела свойства среды в общем случае имеют значения ε_1 и ε_2 (рис. 4.1.1). Кроме того, на поверхности раздела сред может быть сосредоточен электрический заряд с поверхностной плотностью σ.

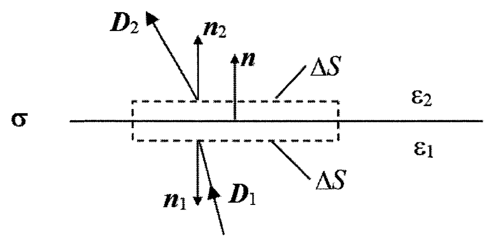

Рис. 4.1.1. Контур на границе раздела двух сред

Для того чтобы найти связь между нормальными компонентами векторов к границе раздела сред применим теорему Гаусса, выбрав замкнутую поверхность таким образом, чтобы высота ее боковой поверхности были пренебрежимо мала.

Для вектора электрического смещения $\boldsymbol{D}$ с учетом уравнения (4.1.2) имеем

$$\int_V \operatorname{div} \boldsymbol{D} dV = \int_V \rho dV \tag{4.1.7}$$

или

$$(D_{2n} - D_{1n})\Delta S = \sigma \Delta S . \tag{4.1.8}$$

Откуда окончательно получаем

$$D_{2n} - D_{1n} = \sigma \tag{4.1.9}$$

или в векторной форме

$$\boldsymbol{n} \cdot (\boldsymbol{D}_2 - \boldsymbol{D}_1) = \sigma . \tag{4.1.9a}$$

Если выразить вектор электрического смещения через вектор напряженности электрического поля, то можно записать для нормальных компонент:

$$\varepsilon_2 E_{2n} - \varepsilon_1 E_{1n} = \sigma . \tag{4.1.10}$$

Из (4.1.9) видно, что на границе раздела сред вектор $\boldsymbol{D}$ является непрерывным, только если поверхностная плотность заряда σ равна нулю. При наличии поверхностной плотности заряда нормальная компонента вектора $\boldsymbol{D}$ изменяется скачком, величина которого равна σ.

Рассмотрим теперь касательные напряженности электрического поля $\boldsymbol{E}$.

Применим уравнение (4.1.1) к контуру, который охватывает границу раздела сред (рис. 4.1.2).

На основании теоремы Стокса можно записать

$$\int_S \operatorname{rot} \boldsymbol{E} d\boldsymbol{S} = \int_l \boldsymbol{E} d\boldsymbol{l} = E_{1\tau}\Delta l - E_{2\tau}\Delta l = 0 \tag{4.1.11}$$

Получаем условия для касательных составляющих напряженности поля:

$$E_{1\tau} = E_{2\tau} . \tag{4.1.12}$$

В векторной форме имеем

$$\boldsymbol{n} \times (\boldsymbol{E}_2 - \boldsymbol{E}_1) = 0 . \tag{4.1.12a}$$

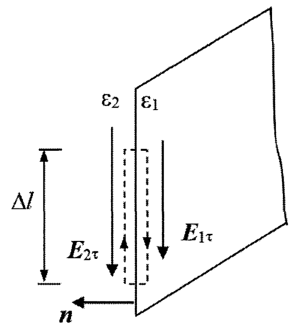

Рис. 4.1.2. Тангенциальные составляющие напряженности электрического поля в двух средах

Можно показать, что из условия непрерывности касательных составляющих следует равенство значений потенциала по разные стороны границы раздела сред:

$$\varphi_1 = \varphi_2. \qquad (4.1.13)$$

Т.к. в условиях электростатики исключается протекание тока в проводящей среде, то *граница раздела диэлектрической и электропроводной сред* имеет постоянное значение потенциала

$$\varphi = \mathrm{const}. \qquad (4.1.14)$$

В этом случае формулируют уравнения для плотности тока и напряженности электрического поля:

$$\mathrm{rot}\, \boldsymbol{E} = 0, \qquad \mathrm{div}\, \boldsymbol{j} = 0, \quad \boldsymbol{j} = \gamma \boldsymbol{E}. \qquad (4.1.15)$$

Уравнение для плотности тока следует непосредственно из первого уравнения Максвелла (3.1.1) для стационарного случая.

Видно, что уравнения (4.1.15) аналогичны уравнениям электростатического поля. В этом случае также может быть введен скалярный потенциал (4.1.4), для которого справедливо уравнение Лапласа (4.1.6).

Здесь отметим, что материальное уравнение в (4.1.15) может быть справедливым только в ограниченной области пространства. Так как стационарные токи по необходимости являются замкнутыми, то в общем случае помимо электрического поля должны существовать силы неэлектрического происхождения, действующие на заряды и обеспечивающие условие замкнутости линий тока.

Граничные условия в соответствие с (4.1.15) имеют вид:

$$E_{1\tau} = E_{2\tau}, \tag{4.1.16}$$

$$j_{2n} = j_{1n} \quad (\gamma_2 E_{2n} = \gamma_1 E_{1n}). \tag{4.1.17}$$

$$\varphi_1 = \varphi_2. \tag{4.1.18}$$

Отдельно выделим частный случай границы, проводящей и непроводящей сред.

Нормальная составляющая плотности тока в проводящей среде, а значит и нормальная составляющая напряженности поля в ней равны нулю:

$$\text{в проводящей среде } j_n = 0, \quad E_n = 0. \tag{4.1.19}$$

Напротив, в непроводящей среде на границе раздела сред нормальная составляющая напряженности электрического поля не равна нулю и обусловлена наличием поверхностной плотности заряда:

$$\text{в непроводящей среде } j = 0, \quad E_n = \frac{\sigma}{\varepsilon\varepsilon_0}. \tag{4.1.20}$$

Тангенциальные составляющие удовлетворяют условиям

$$E_{1\tau} = E_{2\tau} = \frac{j_\tau}{\gamma}. \tag{4.1.21}$$

4.2. Магнитное поле

Аналогично выводам, которые показаны выше, получим граничные условия для векторов магнитного поля. В постановке задачи будем считать, что по разные стороны от границы раздела свойства среды в общем случае имеют значения μ_1 и μ_2 (рис. 4.2.1). Кроме того, на поверхности раздела сред протекает поверхностный ток с поверхностной плотностью тока η.

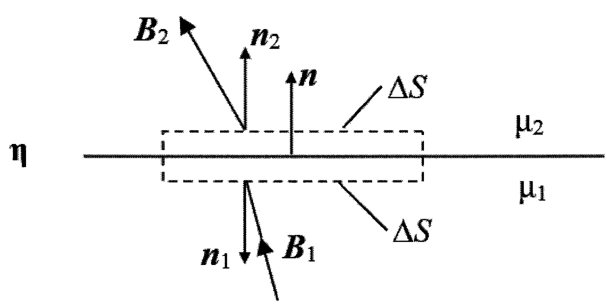

Рис. 4.2.1. Контур и нормальные составляющие вектора магнитной индукции **B** на границе раздела двух сред

Для того чтобы найти связь между нормальными компонентами векторов к границе раздела сред применим теорему Гаусса, выбрав замкнутую поверхность таким образом, чтобы высота ее боковой поверхности были пренебрежимо мала.

Для вектора магнитной индукции $\boldsymbol{B}$ с учетом уравнения (3.5.3б) имеем

$$\int_V \operatorname{div} B dV = \int_V 0 dV \tag{4.2.1}$$

или

$$\left(B_{2n} - B_{1n}\right)\Delta S = 0\,. \tag{4.2.2}$$

Откуда окончательно получаем

$$B_{2n} - B_{1n} = 0 \tag{4.2.3}$$

или в векторной форме

$$\boldsymbol{n}\cdot\left(\boldsymbol{B}_2 - \boldsymbol{B}_1\right) = 0\,. \tag{4.2.4}$$

Если выразить вектор магнитной индукции через вектор напряженности магнитного поля, то можно записать для нормальных компонент:

$$\mu_2 H_{2n} - \mu_1 H_{1n} = 0\,. \tag{4.2.5}$$

Из (4.2.3) видно, что на границе раздела сред вектор $\boldsymbol{B}$ является непрерывным. При наличии поверхностной плотности тока нормальная компонента вектора $\boldsymbol{B}$ изменяется скачком.

Рассмотрим теперь касательные напряженности электрического поля $\boldsymbol{H}$.

Применим уравнение (3.5.1,) к контуру, который охватывает границу раздела сред (рис. 4.2.2).

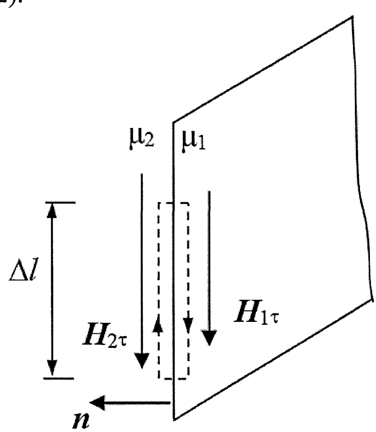

Рис. 4.2.2. Тангенциальные составляющие напряженности магнитного $\boldsymbol{H}$ в двух средах

На основании теоремы Стокса можно записать

$$\int\limits_S \operatorname{rot} \boldsymbol{H} d\boldsymbol{S} = \oint\limits_l \boldsymbol{H} d\boldsymbol{l} = H_{1\tau}\Delta l - H_{2\tau}\Delta l = \int\limits_S \left(\boldsymbol{j} + \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} \right) \cdot d\boldsymbol{S}, \qquad (4.2.6)$$

$$\oint\limits_l \boldsymbol{H} d\boldsymbol{l} = H_{1\tau}\Delta l - H_{2\tau}\Delta l = \int\limits_S (\boldsymbol{j}) \cdot d\boldsymbol{S} + \int\limits_S \left(\frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} \right) \cdot d\boldsymbol{S} = J + \int\limits_S \left(\frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} \right) \cdot d\boldsymbol{S}. \qquad (4.2.7)$$

Получаем условие для касательных составляющих напряженности магнитного поля:

$$H_{1\tau} - H_{2\tau} = \eta. \qquad (4.2.8)$$

В векторной форме имеем

$$\boldsymbol{n} \times (\boldsymbol{H}_2 - \boldsymbol{H}_1) = \eta. \qquad (4.2.9)$$

Если выразить вектор магнитной напряженности через вектор индукции магнитного поля, то можно записать для нормальных компонент:

$$\frac{B_{1\tau}}{\mu_1} - \frac{B_{2\tau}}{\mu_2} = \eta. \qquad (4.2.10)$$

4.3. Квазистатические поля

Данное упрощение относится к переменным полям в поляризуемых средах, для которых выполняется условие:

$$l << \lambda, \qquad (4.3.1)$$

где $\lambda = \dfrac{2\pi}{\omega\sqrt{\varepsilon\varepsilon_0\eta\mu_0}}$ – длина волны электромагнитного поля в поляризуемой среде, ω – циклическая частота, l – характерный размер тела. При этом предполагается, что в переменном электрическом поле существует конечная (хотя и малая) плотность тока $\boldsymbol{j}_{\text{п}} = \boldsymbol{j} + \dfrac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}$, этот ток создает магнитное поле, однако, *электрическое поле, индуцируемое переменным магнитным полем, пренебрежимо мало по сравнению с существующим электрическим полем*. Иными словами, считается, что во втором уравнении Максвелла $\dfrac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} = 0$.

Исходя из того, что в данном случае разрывается взаимообусловленность магнитного и электрического полей, задачи в данной постановке формулируются аналогично, например, полю стационарных токов в проводящей среде (4.1.5):

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{E} = 0, \qquad \operatorname{div} \boldsymbol{j}_{\text{полн}} = 0, \quad \boldsymbol{j}_{\text{полн}} = \gamma \boldsymbol{E} + \varepsilon\varepsilon_0 \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}. \tag{4.3.2}$$

Т.к. поле потенциальное, то может быть введен скалярный потенциал, удовлетворяющий уравнению Лапласа.

Граничные условия такие же как в (4.1.14), но для нормальной составляющей необходимо взять полный ток, включающий ток проводимости и ток смещения.

Видно, что здесь усложняется материальное уравнение, которое принимает вид операторного уравнения.

Квазистатические поля – это поля, изменяющиеся во времени. В дальнейшем будем рассматривать установившиеся гармонические процессы. Их описание, как обычно, будем проводить, в комплексной форме, обозначая действующие значения точкой вверху соответствующей буквы.

Материальное уравнение в (4.3.2), записанное для комплексных действующих значений, принимает следующий вид:

$$\dot{\boldsymbol{j}}_{\text{полн}} = \dot{\boldsymbol{j}} + i\omega\dot{\boldsymbol{D}} = (\gamma + i\omega\varepsilon\varepsilon_0)\dot{\boldsymbol{E}}. \tag{4.3.3}$$

где i – мнимая единица, ω – циклическая частота.

Величина

$$\tilde{\gamma} = \gamma + i\omega\varepsilon\varepsilon_0 \tag{4.3.4}$$

носит название комплексной электропроводности.

Правая часть (4.3.4) может быть записана и по-другому:

$$\dot{\boldsymbol{j}} + i\omega\dot{\boldsymbol{D}} = i\omega\varepsilon_0\left(\varepsilon + \frac{\gamma}{i\omega\varepsilon_0}\right)\dot{\boldsymbol{E}}, \tag{4.3.5}$$

где

$$\tilde{\varepsilon} = \varepsilon + \frac{\gamma}{i\omega\varepsilon_0} \tag{4.3.6}$$

называется комплексной относительной диэлектрической проницаемостью.

С учетом введенных обозначений уравнения квазистатического поля (4.3.2) можно переписать в виде

$$\operatorname{rot} \dot{\boldsymbol{E}} = 0, \qquad \operatorname{div} \dot{\boldsymbol{D}} = 0, \quad \dot{\boldsymbol{D}} = i\omega\varepsilon_0\tilde{\varepsilon}\dot{\boldsymbol{j}}, \tag{4.3.7}$$

или

$$\operatorname{rot}\dot{\boldsymbol{E}} = 0, \qquad \operatorname{div}\dot{\boldsymbol{j}}_{\text{полн}} = 0, \quad \dot{\boldsymbol{j}}_{\text{полн}} = \tilde{\gamma}\dot{\boldsymbol{j}}. \tag{4.3.8}$$

Уравнения (4.3.7) и (4.3.8) отличаются от соответствующих уравнений электростатического поля (4.1.1) – (4.1.3) или поля растекания тока (4.1.5) лишь тем, что они записаны для комплексных векторов поля. Поэтому здесь также может быть введен скалярный комплексный потенциал $\dot{\varphi}$ и сформулированы аналогичные граничные условия, содержащие комплексные диэлектрические проницаемости или комплексные проводимости.

Как видно комплексная проводимость и диэлектрическая проницаемость в общем случае являются функциями частоты. Они отражают как проводящие, так и диэлектрические свойства среды. Подробнее эти параметры будут обсуждаться в дальнейших разделах курса.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Петров, Б.М. Электродинамика и распространение радиоволн: учебник для вузов / Б.М. Петров. – Горячая линия - Телеком, 2007. – 558 с.

2. Кураев, А.А., Попкова, Т.Л., Синицын, А.К. Электродинамика и распространение радиоволн: учебник для вузов / А.А. Кураев. – Инфра-М, 2013. – 424 с.

3. Никольский, В.В., Никольская, Т.И. Электродинамика и распространение радиоволн: учебник для вузов / В.В. Никольский. – М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2012. – 544 с.

4. Фейнман Р., Лейтон Р., Сэндс М. Фейнмановские лекции по физике: Электродинамика. Пер. с англ. Т. 6. Учебник для вузов / Р. Фейнман, 2012. – 360 с.

5. Владимиров, В.С. Уравнения математической физики: учебник для вузов / В. С. Владимиров, В. В. Жаринов. – 2-е изд., стереотип. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004. – 400 с.

6. Муромцев, Д.Ю., Зырянов, Ю.Т., Федюнин, П.А., и др. Электродинамика и распространение радиоволн: учебное пособие. – Тамбов. Издательство ТГТУ, 2012.

7. Парселл, Э. Электричество и магнетизм: учебное руководство: пер. с англ. / под ред. А.И. Шальникова и А.О. Вайсенберга. – 3-е изд., испр. – М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1983. – 416 с. (Берклеевский курс физики).

Учебное издание

Клыгач Денис Сергеевич,
Вахитов Максим Григорьевич,
Хашимов Амур Бариевич

ЭЛЕКТРОДИНАМИКА И РАСПРОСТРАНЕНИЕ РАДИОВОЛН

Учебное пособие

Техн. редактор *А.В. Миних*

Издательский центр Южно-Уральского государственного университета

Подписано в печать 02.07.2020. Формат 60×84 1/16. Печать цифровая.
Усл. печ. л. 2,32. Тираж 50 экз. Заказ 135/205.

Отпечатано в типографии Издательского центра ЮУрГУ.
454080, г. Челябинск, проспект Ленина, 76.